

2025 年点对点专升本数学模拟预测卷 2_答案及解析

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、设曲线过点 $(-1,2)$ ，且曲线上任意一点处切线的斜率等于这点横坐标的两倍，则此曲线的方程是（ ）

A. $y = x^2 + 1$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = -x^2 + 1$

D. $y = -2x + 1$

答案：A

解：①设切点为 (x, y) ，切线斜率为 $f'(x)$

②由题知，切线的斜率等于这点横坐标的两倍

则 $f'(x) = 2x$

两边对 x 积分得： $\int f'(x)dx = \int 2xdx$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + C$

③将 $(-1,2)$ 代入得： $C = 1$

所以 $y = x^2 + 1$

2、设 $f(x) = x^2 + \ln x$ ，则 $f^{(n)}(x) = ()$ ，其中 $n > 2$

A. $2 - \frac{n!}{x^n}$

B. $2 + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

C. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

D. $(-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$

答案：C

解：① $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = 2x + x^{-1}$

② $f''(x) = 2 + (-1)x^{-2}$

③ $f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 2!x^{-3}$

④ $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3 3!x^{-4}$

⑤ $f^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} = (-1)^4 4!x^{-5}$

总结规律得 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

3、设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 ()

A. $f'(x_0)$ 必存在，且 $f'(x_0) = 0$

B. $f'(x_0)$ 必存在，且 $f'(x_0) \neq 0$

C. $f'(x_0)$ 可能不存在

D. $f'(x_0)$ 必定不存在

答案：C

解： x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f''(x_0) = 0$ ，但 $f'(x_0)$ 不一定存在

4、已知 $g(x)$ 的一个原函数是 $x \ln(1+x^2)$ ，则 $\int g'(x)dx$ ()

A. $x \ln(1+x^2) + C$

B. $\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} + C$

C. $\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$

D. $\frac{1}{2}(1+x^2) \ln(1+x^2) + C$

答案：B

解：①由题知， $g(x)$ 的一个原函数是 $x \ln(1+x^2)$

$$\text{则 } g(x) = [x \ln(1+x^2)]' = \ln(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\text{② } \int g'(x)dx = g(x) + C = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} + C$$

5、下列级数收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

答案：D

解：A 选项： $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ ，发散

B 选项：由比较判别法得： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n}{n^2+n} \overset{\text{抓大头}}{=} 2$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散（调和级数），所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$ 发散

C 选项: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \text{发散} (p=\frac{1}{2}) + \text{收敛} (\text{交错级数})$

=发散

D 选项: 由比值判别法得: $u_n = \frac{n^2}{2^n}, u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1, \text{收敛}$$

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

6、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: 1

解: 方法: 夹逼准则

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ (抓大头)

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$ (抓大头)

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}) = 1$

7、设 $f(x) = (x^{500} - 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续, $g(1)=4$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: 2000

解: $f(x) = (x^{500} - 1)g(x) \Rightarrow f(1) = 0$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{500} - 1)g(x)}{x - 1} \stackrel{g(1)=4}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{500} - 1}{x - 1} \\ &\stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{500x^{499}}{1} \stackrel{\text{直接代入}}{=} 2000 \end{aligned}$$

注: 本题因为没有告知 $g(x)$ 的导数是否存在, 所以不能直接求 $f'(x)$, 所以要通过导数定义公式求

8、设函数 $y = f(\frac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x) = \arctan \sqrt{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $-\frac{2\pi}{3}$

解: ① $y' = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$

② $f'(x) = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow f'(3) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

③ 所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = y'|_{x=2} = f'(3) \cdot (-2) = -\frac{2\pi}{3}$

9、设 $\begin{cases} x = \arctan 2t \\ y + e^y = \ln(e + t^2) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____

答案: 0

解: ① $\begin{cases} x = \arctan 2t \\ y + e^y = \ln(e + t^2) \end{cases}$: 当 $x = 0$ 时, $t = 0$, $y = 0$

② 方程 $x = \arctan 2t$: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+4t^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4t^2} \Rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 2$

③ 方程 $y + e^y = \ln(e + t^2)$ 两边对 t 求导得: $y' + e^y y' = \frac{1}{e + t^2} \cdot 2t$

将 $t = 0$, $y = 0$ 代入得: $y' + y' = 0 \Rightarrow y' = 0$, 即 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$

④ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}}{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}} = \frac{0}{2} = 0$

10、定积分 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (1+x \cos^3 x) dx =$ _____

答案: 2π

解: $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (1+x \cos^3 x) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx + \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \cdot x \cos^3 x dx$
 $= \overset{\text{偶倍奇0}}{2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx} + 0 = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi 2^2 = 2\pi$

注: 公式: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$, 其中 $a > 0$

11、曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点是_____

答案: $(2, 2e^{-2})$

解：①定义域： $(-\infty, +\infty)$

$$\textcircled{2} y' = e^{-x} - xe^{-x}, \quad y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

令 $y'' = 0$ ，得 $x = 2$

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y''	-	0	+
y	凸	拐点	凹

拐点： $(2, 2e^{-2})$

12、不定积分 $\int \frac{(x+1)^2}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

答案： $x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$ (C 为任意常数)

$$\text{解：} \int \frac{(x+1)^2}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} dx = \int (1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) dx = x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

13、设 $f(x)$ 满足等式 $xf'(x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ，且 $f(1) = 4$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

答案： $2 - \frac{1}{8}\pi$

解：法一：通过微分方程算出 $f(x)$ —— 计算量大，不易算出

$$\textcircled{1} xf'(x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{2} P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C] = e^{\int \frac{1}{x} dx} [\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C] \\ &= e^{\ln x} [\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} e^{-\ln x} dx + C] = x [\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + C] \\ &= x [\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x^2} dx + C] = \text{积分计算量大，放弃} \end{aligned}$$

法二：利用技巧，分部积分法

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x)dx &= xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xdf(x) = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx = 4 - \int_0^1 [f(x) + \sqrt{2x-x^2}]dx \\
 &= 4 - \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx \quad \text{积分过程见下方【注】} = 4 - \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{4}\pi \\
 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx &= 4 - \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{4}\pi \\
 \Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx &= 4 - \frac{1}{4}\pi \\
 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx &= \frac{4 - \frac{1}{4}\pi}{2} = 2 - \frac{1}{8}\pi
 \end{aligned}$$

注:

$$\begin{aligned}
 \text{其中} \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx \stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}dt \stackrel{\text{令 } -t=u}{=} \int_1^0 \sqrt{1-u^2}d(-u) \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du \stackrel{\text{公式}}{=} \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{1}{4}\pi
 \end{aligned}$$

14、广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $\frac{\pi}{2}$

解: 令 $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x = t^2 + 1$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$; 当 $x=2$ 时, $t=1$

$$\begin{aligned}
 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)t} d(t^2+1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \\
 &= 2 \arctan t \Big|_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

15、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$

答案: $(-1,1)$

解: ① $a_n = 2n-1$, $a_{n+1} = 2(n+1)-1 = 2n+1$

$$\text{② } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$$

$$\text{③ 收敛半径: } R = \frac{1}{\rho} = 1$$

④ 收敛区间: $(-1,1)$

⑤ 当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(-1)^n$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)(-1)^n \neq 0$)

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) \neq 0$)

所以收敛域: $(-1, 1)$

三、计算题 (本大题共有 8 小题, 其中 16-19 小题每小题 7 分, 20-23 小题每小题 8 分, 共 60 分。计算题必须写出计算过程, 只写答案的不给分)

16、求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{4x^2 - x + 3}}{2x + 1}$

答案: $\frac{5}{2}$

解: 令 $x = -t \Rightarrow t = -x$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{4x^2 - x + 3}}{2x + 1} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3(-t) - \sqrt{4(-t)^2 - (-t) + 3}}{2(-t) + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3t - \sqrt{4t^2 + t + 3}}{-2t + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3 - \sqrt{4 + \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}}}{-2 + \frac{1}{t}} = \frac{-3 - \sqrt{4}}{-2 + 0} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

17、已知参数方程 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 1 - \ln(1 + t^2) \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

答案: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = -2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2(1 + t^2)$

解: ① $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = -\frac{2t}{1+t^2}$

$$\text{② } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = -2t \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = -2$$

$$\text{③ } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2}{\frac{1}{1+t^2}} = -2(1+t^2)$$

18、设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(tx)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$. 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

答案: (1) $\varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{1}{x} f(x), & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}$

(2) $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

解: (1) 先求 $\varphi'(x)$

① 由题 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

② 当 $x \neq 0$ 时, $\varphi(x) = \int_0^1 f(tx)dt$:

$$\text{令 } tx = u \Rightarrow t = \frac{u}{x}$$

当 $t=1$ 时, $u=x$; 当 $t=0$ 时, $u=0$

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(tx)dt = \int_0^x f(u) d\frac{u}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{1}{x} f(x)$$

③ 当 $x=0$ 时, $\varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = \int_0^1 0dt = 0$

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(u)du}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\text{所以 } \varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{1}{x} f(x), & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

(2) 再讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{1}{x} f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \left(\frac{0}{0} \text{ 洛} \right) \\ &= A - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0) \end{aligned}$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

19、求不定积分 $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

答案: $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$ (C 为任意常数)

解: 令 $x = \tan t$, 可得: $t = \arctan x$, $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} d \tan t = \int \frac{1}{(\sec^2 t)^2} d \tan t = \int \frac{1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin t \cos t + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C \end{aligned}$$

20、设 $f(x)$ 为可导函数, $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + 1$, 求函数 $f(x)$

答案: $f(x) = e^{2x}$

解: ① $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + 1$ —— (a)

两边对 x 求导得: $f'(x) = 2f(x)$

$$\Rightarrow y' - 2y = 0, \quad P(x) = -2$$

$$y = Ce^{\int P(x) dx} = Ce^{\int -2 dx} = Ce^{-2x} \text{ —— (b)}$$

② 由 (a) 式得, $f(0) = 0 + 1 = 1$

将 $f(0) = 1$ 代入 (b) 式得, $C = 1$

所以 $f(x) = e^{2x}$

21、设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 2f(x) = -x$, 且由曲线 $y = f(x)$, $x = 1$ 及 x 轴 ($x \geq 0$) 所围成的平面图形为 D 。若 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小, 求:

(1) 曲线 $y = f(x)$;

(2) 曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线及直线 $x = 1$ 所围成的平面图形的面积

答案: (1) $y = -\frac{5}{4}x^2 + x$; (2) $S = \frac{5}{12}$

解: (1) ① $xf'(x) - 2f(x) = -x \Rightarrow y' - \frac{2}{x}y = -1$

$$P(x) = -\frac{2}{x}, \quad Q(x) = -1$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] = e^{\int \frac{2}{x}dx} \left[-\int e^{-\frac{2}{x}} dx + C \right] \\ &= e^{2\ln x} \left[-\int e^{-2\ln x} dx + C \right] = x^2 \left(-\int \frac{1}{x^2} dx + C \right) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x} + C \right) = Cx^2 + x \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} V(C) = \pi \int_0^1 (Cx^2 + x)^2 dx = \pi \int_0^1 (C^2x^4 + 2Cx^3 + x^2) dx$$

$$= \pi \left(\frac{C^2}{5}x^5 + \frac{1}{2}Cx^4 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5}C^2 + \frac{1}{2}C + \frac{1}{3} \right)$$

$$V'(C) = \pi \left(\frac{2}{5}C + \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow C = -\frac{5}{4}$$

$$V''(C) = \frac{2}{5}\pi > 0$$

$$\text{所以当 } C = -\frac{5}{4} \text{ 时, } V(C) \text{ 最小, } y = -\frac{5}{4}x^2 + x$$

$$\textcircled{2} y' = -\frac{5}{4}x^2 + x = -\frac{5}{2}x + 1 \Rightarrow y'(0) = 1$$

所以曲线在点 $(0,0)$ 处的切线为: $y = x$

$$\text{围成的图形面积为: } S = \int_0^1 \left[x - \left(-\frac{5}{4}x^2 + x \right) \right] dx = \int_0^1 \frac{5}{4}x^2 dx = \frac{5}{12}x^3 \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

22、求函数 $y = x - \ln(x+1)$ 的单调区间与极值、凹凸区间

答案: 单调减区间: $(-1,0)$; 单调增区间: $(0,+\infty)$; 极小值: $y(0) = 0$

凹区间: $(-1,+\infty)$

解: ① 定义域: $(-1,+\infty)$

$$\textcircled{2} y' = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

令 $y' = 0$ 得, $x = 0$

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
-----	----------	-----	---------------

$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

单调减区间: $(-1,0)$; 单调增区间: $(0,+\infty)$

极小值: $y(0)=0$

$$\textcircled{3} y'' = \frac{1 \cdot (x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

凹区间: $(-1,+\infty)$

23、求通过点 $(1,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=5+t \end{cases}$ 垂直, 又与平面 $x-y-z-5=0$ 平行的直线方程

答案: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

解: ① 设所求直线 l_1 的方向向量为 \vec{s}_1

设直线 $l_2: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=5+t \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s}_2 = (2, -1, 1)$

设平面 $\pi: x-y-z-5=0$ 的法向量为 $\vec{n} = (1, -1, -1)$

② 因为所求直线 l_1 与直线 l_2 垂直, 即 $l_1 \perp l_2$

所以 $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

③ 因为所求直线 l_1 与平面 π 平行, 即 $l_1 \perp \pi$

所以 $\vec{s}_1 \perp \vec{n}$

由上述得: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ 且 $\vec{s}_1 \perp \vec{n}$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \vec{s}_1 = \vec{s}_2 \times \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (2, 3, -1)\end{aligned}$$

④由直线的点向式方程得: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

所以所求直线为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

四、综合题（本大题共三题，每小题 10 分，共 30 分）

24、证明不等式: $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$

答案: /

证: ① $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 根据积分上下限得 $x > 0$

② $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1 \cdot (1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x > 0$ 时单调增

$\Rightarrow f(x) > f(0)$, 其中 $f(0) = 0$

所以 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

所以 $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$

注: 本题利用定积分性质:

若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ ($a < b$)

25、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的和函数

答案: $S(x) = \frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$

解: ① $a_n = 2n+1$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

$$\text{收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 1$$

收敛区间为: $(-1,1)$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(-1)^n$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(-1)^n \neq 0$)

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \neq 0$)

收敛域为: $(-1,1)$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n, \quad x \in (-1,1)$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' + \frac{x}{1-x} \\ &= 2x \left(\frac{x}{1-x} \right)' + \frac{x}{1-x} = 2x \frac{1 \cdot (1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{3x-x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{即 } S(x) = \frac{3x-x^2}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1)$$

26、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 2$, 证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$

答案: /

证: ① 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数

$$f(0) = f(1) = 2$$

所以由罗尔中值定理得, 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 η , 使得 $f'(\eta) = 0$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } F(x) = x^2 f'(x)$$

$$F(0) = 0, \quad F(\eta) = \eta^2 f'(\eta) = 0$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数

所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导

所以由罗尔中值定理得, 至少存在一点 $\xi \in (0,\eta) \subset (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow F'(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$$

$$\Rightarrow F'(\xi) = 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f''(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow 2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$$

浙点教育
ZHE DIAN DUI DIAN EDUCATION