

2025 年点对点专升本数学模拟预测卷 1_答案及解析

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、设 $x \rightarrow 0$ ， $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n = (\quad)$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案：C

$$\begin{aligned} \text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot (\tan x - x) \stackrel{0}{\text{洛}}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{nx^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{nx^{n-1}} \end{aligned}$$

因为 $x \rightarrow 0$ ， $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小

所以 $n-1=2 \Rightarrow n=3$

2、 $x=0$ 是函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 的 (\quad)

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

答案：A

解：① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{有界} = 0$ ，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限均为 0

② 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无意义

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点

3、设函数 $f(x)$ 具有连续可导函数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x+\sin x} = 1$ ，则 $f'(0) = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

答案：C

解：① 由题 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x+\sin x} = 1$ 知， $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)-2] = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x+\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \cdot \frac{x}{x+\sin x} \stackrel{\text{见下面过程}}{=} f'(0) \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow f'(0) = 2$

③ 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+\sin x} \stackrel{0}{\text{洛}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

4、设 $f(x)$ 为可导函数， $F(x)$ 为其原函数，则 (\quad)

- A.若 $f(x)$ 为周期函数, 则 $F(x)$ 也是周期函数
- B.若 $f(x)$ 为单调函数, 则 $F(x)$ 也是单调函数
- C.若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数
- D.若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 是奇函数

答案：C

解：方法：举反例

- A 选项: $f(x)=1+\cos x$ (周期函数), $F(x)=x+\sin x$ (不是周期函数)
- B 选项: $f(x)=2x$ (单调增函数), $F(x)=x^2$ (不是单调函数, 先减后增)
- D 选项: $f(x)=\cos x$ (偶函数), $F(x)=1+\sin x$ (非奇非偶函数)

5、已知二阶微分方程 $y'' + y = 4x \sin x$ ，则其特解 y^* 可以设为 ()

- A. $(ax + b) \sin x$
- B. $(ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x$
- C. $(ax + b)x \sin x$
- D. $x[(ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x]$

答案: D

解: ①对齐次方程: $y'' + y = 0$

设特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

②对非齐次方程: $y'' + y = 4x \sin x = e^{0 \cdot x} (0 \cdot \cos x + 4x \sin x)$

设特解为 $y^* = x^k e^{0 \cdot x} [(ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x]$

其中 $\lambda=0$, $\omega=1$, $\lambda \pm \omega i=0 \pm i$ 是特征方程的根, 即 $\lambda \pm \omega i=r$, 得 $k=1$

所以非齐次方程的特解为: $y^* = x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6、设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$ ，则 $f(\ln x)$ 的定义域为_____

答案: $(1, e)$

解: ①由题知: $0 < x < 1$

$$\textcircled{2} 0 < \ln x < 1 \Rightarrow \ln 1 < \ln x < \ln e \Rightarrow 1 < x < e$$

所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1, e)$

7、已知 $f'(1)=3$ ，则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} =$ _____

答案：9

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h} = 3f'(1) = 9$

8、已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ ，则 $a =$ _____， $b =$ _____

答案： $a = -1$ ， $b = -2$

解：①由题 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ 知， $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0 \Rightarrow 4+2a+b=0$

② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+a}{1} = 4+a = 3 \Rightarrow a = -1$

所以 $a = -1$ ， $b = -2$

9、曲线 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 _____

答案： $y = 3x - 7$ 或写 $3x - y - 7 = 0$

解：①当 $t=2$ 时， $x=5$ ， $y=8$ ，即切点为 $(5, 8)$

② $\frac{dx}{dt} = 2t$ ， $\frac{dy}{dt} = 3t^2$

③ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = 3$

所以切线方程为 $y - 8 = 3(x - 5) \Rightarrow y = 3x - 7$

10、曲线 $y = x^{\sin x}$ ，则微分 $dy =$ _____

答案： $(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x) x^{\sin x} dx$

解：法一：取对数求导

①两边取对数得： $\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$

②两边对 x 求导得： $\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

$$y' = (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x)y = (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x)x^{\sin x}$$

$$\text{所以 } dy = (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x)x^{\sin x} dx$$

法二：换底（e）求导

$$\textcircled{1} y = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln x} \Rightarrow y = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$\textcircled{2} y' = e^{\sin x \cdot \ln x} (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x)$$

$$\text{所以 } dy = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x) dx$$

11、已知 $F(x) = \int_x^1 \sin t^2 dt$ ，则 $F'(x) =$ _____

答案： $-\sin x^2$

解： $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 \sin t^2 dt = 0 - \sin x^2 = -\sin x^2$

12、反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ _____

答案： $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

$$\begin{aligned} \text{解： } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= -\int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d\arctan x \\ &= -(0 - \frac{\pi}{4}) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \ln|x| \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 0 - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 0 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln \sqrt{1+x^2}) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

注：其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln 1 = 0$

13、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \frac{2n}{n+1})$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____

答案: 2

解: 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \frac{2n}{n+1})$ 收敛

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \frac{2n}{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

14、设 $f(x) = e^{2x+1}$, 则 $f^{-1}(x) =$ _____

答案: $\frac{\ln x - 1}{2}, x > 0$

解: $f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow y = e^{2x+1}, y > 0$

$$\Rightarrow 2x+1 = \ln y \Rightarrow x = \frac{\ln y - 1}{2}, y > 0$$

$$\text{所以反函数 } f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 1}{2}, x > 0$$

15、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \cdots + \sin 1) =$ _____

答案: $1 - \cos 1$

解: 方法: 用定积分定义求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \cdots + \sin 1) = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^1 = -\cos 1 + 1$$

三、计算题 (本大题共有 8 小题, 其中 16-19 小题每小题 7 分, 20-23 小题每小题 8 分, 共 60 分。计算题必须写出计算过程, 只写答案的不给分)

16、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$

答案: 1

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} &\stackrel{\text{分母等价}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\frac{1}{2}(-x^2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1 \end{aligned}$$

17、设 $f(x) = \ln(2+x) + 5x^4$, 求 $f^{(4)}(x)$

答案: $-\frac{6}{(2+x)^4} + 120$

解：法一：利用高阶导数公式： $[\ln(x+a)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+a)^n}$, $(x^n)^{(n)} = n!$

$$f^{(4)}(x) = (-1)^3 \frac{3!}{(2+x)^4} + 5 \cdot 4! = -\frac{6}{(2+x)^4} + 5 \cdot 4! = -\frac{6}{(2+x)^4} + 120$$

法二：死算，一阶二阶三阶四阶

$$\textcircled{1} f'(x) = \frac{1}{2+x} + 20x^3$$

$$\textcircled{2} f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} + 60x^2$$

$$\textcircled{3} f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3} + 120x$$

$$\textcircled{4} f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4} + 120$$

18、求 a 、 b 的值，使得函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导

答案： $a=1$, $b=-1$

解：① $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

②先连续

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b; \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处连续} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(0)$$

$$\text{所以 } a+b=0 \Rightarrow b=-a$$

③再可导

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax-a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1)}{x-1} = a$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{0/0 \text{ 洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处可导} \Rightarrow f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$\text{所以 } a=1$$

$$\text{综上, } a=1, b=-1$$

19、求不定积分 $\int \operatorname{arc} \cot x dx$

答案: $x \operatorname{arc} \cot x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (C 为任意常数)

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \operatorname{arc} \cot x dx &= x \operatorname{arc} \cot x - \int x d \operatorname{arc} \cot x = x \operatorname{arc} \cot x + \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arc} \cot x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx^2 = x \operatorname{arc} \cot x + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C \\ &= x \operatorname{arc} \cot x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

20、求定积分 $\int_{-1}^1 (\frac{x^3}{1+x^2+x^4} + |x|e^{x^2}) dx$

答案: $e-1$

$$\text{解: } \int_{-1}^1 (\frac{x^3}{1+x^2+x^4} + |x|e^{x^2}) dx \stackrel{\text{偶倍奇0}}{=} 0 + 2 \int_0^1 |x|e^{x^2} dx = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} \Big|_0^1 = e-1$$

21、求过原点 O 及点 $A(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面方程

答案: $2x+2y-3z=0$

解: ① 设所求平面 π_1 的法向量为 \vec{n}_1

设平面 $\pi_2: 4x-y+2z=8$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(4,-1,2)$

② 因为原点 O 及点 $A(6,-3,2)$ 在所求平面 π_1 上, 其中 $\vec{n}_1 \perp \pi_1$

所以 $\vec{OA}=(6,-3,2)$ 也在所求平面 π_1 上, 即 $\vec{n}_1 \perp \vec{OA}$

③ 因为所求平面 π_1 与平面 π_2 垂直, 即 $\pi_1 \perp \pi_2$

所以 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

由上述得: $\vec{n}_1 \perp \vec{OA}$ 且 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \vec{n}_1 &= \vec{OA} \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} = (-4, -4, 6) = -2(2, 2, -3) \end{aligned}$$

④由平面的点法式方程得: $2 \times (x-0) + 2 \times (y-0) - 3 \times (z-0) = 0$

所以所求平面为 $2x + 2y - 3z = 0$

22、求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x}$ 的通解

答案: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-x}$ (C_1, C_2 为任意常数)

解: ①对齐次方程: $y'' - 3y' + 2y = 0$

设特征方程为: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$

所以齐次方程的通解为 $\hat{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

②对非齐次方程: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x}$ —— (a)

设非齐次方程的特解为: $y^* = Ax^k e^{-x}$

因为非齐次方程中的 $\lambda = -1$ 不是特征方程的根, 即 $\lambda \neq r_{1,2}$, 所以 $k = 0$

得 $y^* = Ax^k e^{-x} = Ax^0 e^{-x} = Ae^{-x}$

$(y^*)' = -Ae^{-x}, (y^*)'' = Ae^{-x}$

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入方程 (a), 得:

$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 2e^{-x}$

$\Rightarrow 6Ae^{-x} = 2e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

所以非齐次方程的特解为: $y^* = \frac{1}{3} e^{-x}$

综上, 原方程的通解为: $y = \hat{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-x}$

23、求函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间与凹凸区间

答案: 单调增区间: $(-\infty, 0), (1, +\infty)$; 单调减区间: $(0, 1)$

凸区间: $(-\infty, 0)$; 凹区间: $(0, +\infty)$

解: ①定义域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

② $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \frac{(x-1)}{x}$

令 $f'(x) = 0$, $x = 1$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	↑	↓	极小值	↑

单调增区间: $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$; 单调减区间: $(0, 1)$

③ $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$, 其中

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	凸	凹

凸区间: $(-\infty, 0)$; 凹区间: $(0, +\infty)$

四、综合题 (本大题共三题, 每小题 10 分, 共 30 分)

24、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的收敛区间与和函数, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

答案: $S(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$

解: ① $a_n = 2n-1$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$$

收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$

收敛区间为: $(-1, 1)$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(-1)^n$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)(-1)^n \neq 0$)

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$, 发散 ($\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) \neq 0$)

收敛域为: $(-1,1)$

② 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$, $x \in (-1,1)$

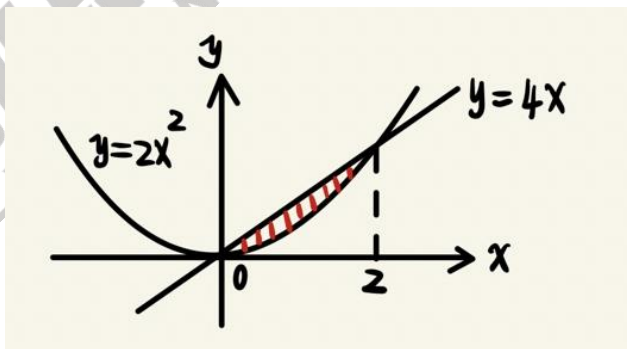
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' - \frac{x}{1-x} \\ &= 2x \left(\frac{x}{1-x} \right)' - \frac{x}{1-x} = 2x \frac{1 \cdot (1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x+x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

即 $S(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \left(\frac{1}{2} \right)^n = S\left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$

25、已知曲线 $C: y=2x^2$, 直线 $L: y=4x$, 求曲线 C 和直线 L 所围成的平面图形 D 的面积, 并求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积

答案: $S = \frac{8}{3}$, $V_x = \frac{256}{15}\pi$



解: ① 联立方程组 $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=8 \end{cases}$

即曲线 C 与直线 L 交点为 $(0,0)$, $(2,8)$

② $S = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$

$$\begin{aligned}
 V_x &= \int_0^2 \pi[(4x)^2 - (2x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - 4x^4) dx = \pi \left(\frac{16}{3} x^3 - \frac{4}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 \\
 &= \pi \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{5} \right) = \frac{256}{15} \pi
 \end{aligned}$$

26、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(1) = 2f(0)$ ，试证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $(1+\xi)f'(\xi) = f(\xi)$

答案：/

证：①令 $F(x) = \frac{f(x)}{1+x}$

$$② F(0) = f(0), \quad F(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{2f(0)}{2} = f(0)$$

即 $F(0) = F(1)$

③因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导

所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导

由罗尔中值定理得，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $F'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{(1+x)f'(x) - f(x)}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow F'(\xi) = \frac{(1+\xi)f'(\xi) - f(\xi)}{(1+\xi)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (1+\xi)f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\xi)f'(\xi) = f(\xi)$$