

点对点专升本_数学_大一模拟测试卷 1_答案及解析

一、选择题（本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、下列函数为奇函数的是（ ）

A. $y = x$

B. $y = |x|$

C. $y = x^2$

D. $y = \cos x$

答案：A

解：由四个选项的函数图可知，选项 A 为奇函数，其余都是偶函数

2、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x}{3 + \ln(1+x)} = ()$

A. $\frac{1}{e}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

答案：C

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x}{3 + \ln(1+x)} \stackrel{\text{代入}}{=} \frac{1}{3 + \ln 1} = \frac{1}{3}$

3、已知函数 $f(x) = \begin{cases} a+x, & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a = ()$

A. 2

B. 0

C. -1

D. 1

答案：D

解： $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{分子等价成 } x \text{ 或第一重要极限}}{=} 1$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

所以 $a=1$

4、当 $x \rightarrow 0$ 时， $e^{x^2} - 1$ 与 x^k 等价，则 $k = ()$

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

答案：B

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^k} \stackrel{\text{分子等价}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k} = 1 \Rightarrow k = 2$

5、已知 $f'(3) = 2$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h} = ()$

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

答案: D

$$\text{解: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h} = (-2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{-2h} = -2f'(3) = -4$$

6、已知函数 $y = x \sin x + 2 \ln x$ ，则 $y' =$ ()

A. $\sin x + \frac{2}{x}$

B. $x \cos x + \frac{2}{x}$

C. $\sin x + x \cos x + \frac{1}{x}$

D. $\sin x + x \cos x + \frac{2}{x}$

答案: D

$$\text{解: } y' = 1 \cdot \sin x + x \cos x + 2 \cdot \frac{1}{x} = \sin x + x \cos x + \frac{2}{x}$$

7、已知参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ ，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ ()

A. -1

B. -2

C. 0

D. 1

答案: A

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

8、函数 $y = \ln x + e$ 在点 $(1, e)$ 处的切线方程是 ()

A. $y = x + e - 1$

B. $y = x + e$

C. $y = x - 1$

D. $y = x - e$

答案: A

解: ①由题知，切点为 $(1, e)$

$$\text{② } y = \ln x + e \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'(1) = 1, \text{ 则切线斜率为 } y'(1) = 1$$

$$\text{所以切线方程为: } y - e = 1 \times (x - 1) \Rightarrow y = x + e - 1$$

9、函数 $y = 2x^3 - 3x^2 + 8$ 的拐点为 ()

A. $(1, 2)$

B. $(2, 15)$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$

D. $(\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$

答案: C

解: ①定义域为: $(-\infty, +\infty)$

$$\text{② } y' = 6x^2 - 6x, \quad y'' = 12x - 6$$

令 $y'' = 0$ 得: $x = \frac{1}{2}$

x	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
y''	-	0	+
y	凸	拐点	凹

拐点: $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$

10、若 $f(x)$ 连续, 则下列等式正确的是 ()

A. $\int df(x) = f(x)$

B. $d[\int f(x)dx] = f(x)$

C. $\int f'(x)dx = f(x)$

D. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

答案: D

解: A 选项: $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

B、D 选项: 设 $F'(x) = f(x)$

$$d[\int f(x)dx] = d[F(x) + C] = [F(x) + C]'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

C 选项: $\int f'(x)dx = f(x) + C$

11、不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = ()$

A. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$

B. $\frac{1}{\sqrt{x}} + C$

C. $2\sqrt{x} + C$

D. $\sqrt{x} + C$

答案: C

解: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

12、不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx = ()$

A. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2} + C$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2}$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$

D. $-4\sqrt{x+2} + C$

答案: A

解：令 $\sqrt{x+2} = t \Rightarrow x+2 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 2$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx &= \int \frac{t^2-2}{t} d(t^2-2) = \int \frac{t^2-2}{t} \cdot 2tdt = 2 \int (t^2-2) dt \\ &= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2} + C\end{aligned}$$

13、不定积分 $\int (x+1)e^x dx = (\quad)$

- A. $xe^x - e^x + C$ B. $xe^x - 2e^x + C$ C. $xe^x + C$ D. $2xe^x + C$

答案：C

解： $\int (x+1)e^x dx = \int xe^x dx + \int e^x dx = \int xde^x + \int e^x dx = xe^x - \int e^x dx + \int e^x dx = xe^x + C$

14、不定积分 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = (\quad)$

- A. $x - \frac{1}{2} \ln(1+e^x) + C$ B. $x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C$
C. $x - \ln(1+e^{2x}) + C$ D. $2x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C$

答案：B

解：法一：分子加减 e^{2x}

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) dx = \int 1 dx - \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \\ &= x - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} d2x = x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+e^{2x}} de^{2x} = x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C\end{aligned}$$

法二：换元：令 $e^x = t \Rightarrow x = \ln t$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \int \frac{1}{1+t^2} d \ln t = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt^2 \\ &= \ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C\end{aligned}$$

15、函数 $f(x) = \int_1^x \sec^2 t dt$ 的导数为 (\quad)

- A. $\tan x$ B. $-\tan x$ C. $-\sec^2 x$ D. $\sec^2 x$

答案：D

解: $f'(x) = \sec^2 x \cdot x' = \sec^2 x$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

16、已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ，则 $f[f(0)] =$ _____

答案: $\frac{1}{2}$

解: ① $f(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

② $f[f(0)] = f[1] = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

17、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{3n} =$ _____

答案: e^3

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{n})^n]^3 = e^3$

18、已知函数 $f(x) = \sin^2 x$ ，则 $f''(0) =$ _____

答案: 2

解: ① $f'(x) = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

② $f''(x) = 2 \cos 2x$

③ $f''(0) = 2 \cos 0 = 2$

19、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^y + y = 1$ 所确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,1)} =$ _____

答案: $-e$

解: ① 方程 $xe^y + y = 1$ 两边对 x 求导得: $e^y + xe^y y' + y' = 0$

② 将 $x = 0$, $y = 1$ 代入得: $e + 0 + y' = 0 \Rightarrow y' = -e$

所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,1)} = -e$

20、设 $y = e^{2x} + \cos(x+1)$ ，则 $dy =$ _____

答案: $[2e^{2x} - \sin(x+1)]dx$

解: $y' = 2e^{2x} - \sin(x+1) \Rightarrow dy = [2e^{2x} - \sin(x+1)]dx$

21、设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内可导，若 $f'(x)$ _____ (填 “ >0 或 <0 ”), 则曲线在区间 I 内是单调减小的

答案: <0

解: 在区间 I 内 $f'(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 I 内单调递减

22、若 $f(x) = xe^x$, 则 $f(x)$ 的极小值点为 _____

答案: $x = -1$

解: ① 定义域为: $(-\infty, +\infty)$

$$\textcircled{2} f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\downarrow	极小值	\uparrow

极小值点为 $x = -1$

23、曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐近线为 _____

答案: $y = \frac{1}{2}$

解: $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$, 所以水平渐近线为 $y = \frac{1}{2}$

24、不定积分 $\int (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x^2}) dx =$ _____

答案: $\ln|x-1| + \arctan x + C$ (C 为任意常数)

解: $\int (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x^2}) dx = \int \frac{1}{x-1} d(x-1) + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \ln|x-1| + \arctan x + C$

25、定积分 $\int_{-1}^1 x^{2022} \arcsin x dx =$ _____

答案: 0

解: 因为 $x^{2022} \arcsin x$ 是奇函数, 其中 $\arcsin x$ 是奇函数

$$\text{所以 } \int_{-1}^1 x^{2022} \arcsin x dx \stackrel{\text{偶倍奇0}}{=} 0$$

三、计算题（本大题共有 5 小题，每小题 10 分，共 50 分。计算题必须写出计算过程，只写答案的不给分）

26、求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

答案：-3

解：法一： $\frac{0}{0}$ 洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x - 3} \stackrel{\text{直接代入}}{=} \frac{3}{-1} = -3$$

法二：因式分解

①立方差公式： $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} \stackrel{\text{直接代入}}{=} \frac{3}{-1} = -3$

27、设 $f(x) = \begin{cases} x \sin x + \frac{\ln(1+3x)}{x}, & -\frac{1}{3} < x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续，求 a 的值

答案： $a = 3$

解：① $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x \sin x + \frac{\ln(1+3x)}{x} \right] = 0 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3$

② $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$

$\because f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

$\therefore a = 3$

28、求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的单调区间与极值

答案：单调增区间： $(-\infty, 0)$ ， $(2, +\infty)$ ；单调减区间： $(0, 2)$ ——单调增减区间写闭区间也可以

极大值为 $f(0) = 1$ ；极小值为 $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$

解：①定义域为： $(-\infty, +\infty)$

② $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

令 $f'(x)=0$ 得: $x_1=0$, $x_2=2$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	\uparrow	极大值	\downarrow	极小值	\uparrow

单调增区间: $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$; 单调减区间: $(0, 2)$

极大值为 $f(0)=1$; 极小值为 $f(2)=8-12+1=-3$

29、求定积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

答案: $2-2\ln 2$

解: 令 $\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$

当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$

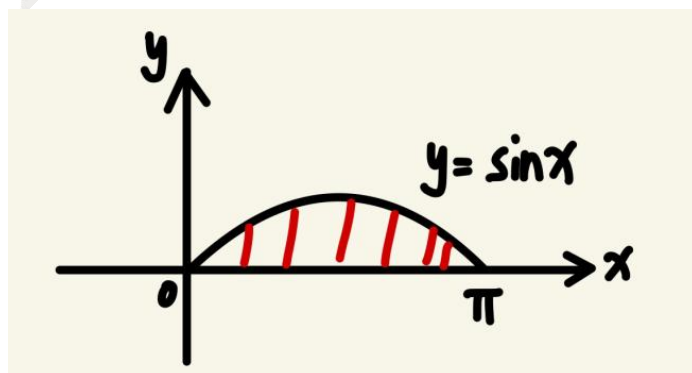
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt^2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) \Big|_0^1 = 2-2\ln 2 \end{aligned}$$

30、已知 D 是曲线 $y=\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围成的平面图形, 求:

(1) D 的面积

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的立体体积

答案: (1) 2, (2) $\frac{\pi^2}{2}$



解: (1) $S_D = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$

$$\begin{aligned}(2) \quad V_x &= \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

浙点教育
ZHE DIAN DUI DIAN EDUCATION