

点对点专升本_数学_大一模拟测试卷 2_答案及解析

一、选择题（本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，则 $f(\pi) =$ ()

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

答案：B

解：因为 $\pi > \frac{\pi}{2}$ ，所以 $f(\pi) = 0$

2、函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ ()

A. 0

B. 2

C. 5

D. 不存在

答案：D

解：① $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+3) = 5$

② $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-1) = 0$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ 不存在

3、当 $x \rightarrow 0$ 时，下列为无穷小量的是 ()

A. $f(x) = x^2 + 1$

B. $f(x) = \sin x$

C. $f(x) = \cos x$

D. $f(x) = e^x$

答案：B

解：A 选项： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$

B 选项： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

C 选项： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

D 选项： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

4、设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = (\quad)$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

答案: C

解: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

所以 $a = 1$

5、若 $f'(1) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = (\quad)$

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

答案: D

解: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} = -2f'(1) = -4$

6、设函数 $y = x^2 + \ln x$, 则 $y''(1) = (\quad)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案: B

解: ① $y' = 2x + \frac{1}{x}$

② $y'' = 2 - \frac{1}{x^2}$

③ $y''(1) = 2 - 1 = 1$

7、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2e^t \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = (\quad)$

A. $-e$

B. 0

C. e D. $2e$

答案: C

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t}{2t} = \frac{e^t}{t} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = e$

8、曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 在点 (2,1) 处的切线斜率为 (\quad)

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

答案: A

解: $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -1$

所以切线斜率为 $y'(2) = -1$

9、曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ 的凹区间是 ()

A. $(-\infty, -4)$

B. $(-\infty, -2)$

C. $(-5, +\infty)$

D. $(1, +\infty)$

答案: D

解: ①定义域: $(-\infty, +\infty)$

② $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y'' = 6x - 6 > 0 \Rightarrow x > 1$

所以凹区间 $(1, +\infty)$

10、若 $f'(x)$ 连续, 则下列等式正确的是 ()

A. $[\int f(x)dx]' = f(x)$

B. $\int f'(x)dx = f(x)$

C. $\int df(x) = f(x)$

D. $d[\int f(x)dx] = f(x)$

答案: A

解: A 选项: 设 $F'(x) = f(x)$

$$[\int f(x)dx]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

B 选项: $\int f'(x)dx = f(x) + C$

C 选项: $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

D 选项: $d[\int f(x)dx] = d[F(x) + C] = [F(x) + C]'dx = F'(x)dx = f(x)dx$

11、不定积分 $\int \frac{1}{x^2} dx =$ ()

A. $\frac{1}{x} + C$

B. $x + C$

C. $-\frac{1}{x} + C$

D. $-x + C$

答案: C

解: $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

12、不定积分 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx =$ ()

A. $2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C$

B. $2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1}$

C. $2\sqrt{x-1} + C$

D. $-2\arctan\sqrt{x-1} + C$

答案: A

解: 令 $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{t}{t^2+1} d(t^2+1) = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int (1 - \frac{1}{t^2+1}) dt = 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

13、不定积分 $\int x \cos x dx = (\quad)$

A. $-x \sin x + \cos x + C$

B. $-x \sin x - \cos x + C$

C. $x \sin x - \cos x + C$

D. $x \sin x + \cos x + C$

答案: D

解: $\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

14、不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1} dx = (\quad)$

A. $x - \ln(e^x+1) + C$

B. $\ln(e^x+1) + C$

C. $e^x - \ln(e^x+1) + C$

D. $x + \ln(e^x+1) + C$

答案: A

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \frac{1}{e^x+1} dx &= \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} dx = \int (1 - \frac{e^x}{e^x+1}) dx = x - \int \frac{1}{e^x+1} de^x \\ &= x - \ln|e^x+1| + C = x - \ln(e^x+1) + C\end{aligned}$$

15、设函数 $F(x) = \int_0^x \arctan t dt$, 则 $F'(x) = (\quad)$

A. $\arcsin x$

B. $\arccos x$

C. $\arctan x$

D. $\operatorname{arc} \cot x$

答案: C

解: $F'(x) = \arctan x \cdot x' = \arctan x$

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

16、函数 $y = \sqrt{2x-1}$ 的定义域是 _____

答案: $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 或写 $\{x|x \geq \frac{1}{2}\}$ 也可以

解: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

所以定义域是 $[\frac{1}{2}, +\infty)$

17、极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: 4

解: 法一: $\frac{0}{0}$ 洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} \stackrel{\text{代入}}{=} 4$$

法二: 分子平方差

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

18、设函数 $y = (x-1)^{2025} + e^x$, 则 $y''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: e

解: ① $y' = 2025(x-1)^{2024} + e^x$

$$\text{② } y'' = 2025 \cdot 2024(x-1)^{2023} + e^x$$

$$\text{③ } y''(1) = 0 + e = e$$

19、设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^x - e^y = xy$ 确定的隐函数, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: 1

解: ① 方程两边对 x 求导得: $e^x - e^y y' = y + xy'$

$$\text{② 将 } x=0, y=0 \text{ 代入得: } 1 - y' = 0 \Rightarrow y' = 1$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = 1$$

20、设 $y = (x-3)^4$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $4(x-3)^3 dx$

解: $y' = 4(x-3)^3$, 所以 $dy = 4(x-3)^3 dx$

21、设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内可导, 若 $f'(x)$ _____ (填 “ >0 或 <0 ”), 则曲线在区间 I 内是单调增加的

答案: >0

解: 在区间 I 内 $f'(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 I 内单调递增

22、当 $x=1$ 时, $f(x) = x^3 + 3px + q$ 取得极值 (其中 q 为任意常数), 则 $p =$ _____

答案: -1

解: ① $f'(x) = 3x^2 + 3p$

② 由题知, 当 $x=1$ 时, $f(x) = x^3 + 3px + q$ 取得极值

所以 $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 3p = 0 \Rightarrow p = -1$

23、曲线 $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$ 的垂直渐近线为 _____

答案: $x = 1$

解: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$, 所以垂直渐近线为 $x = 1$

24、不定积分 $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx =$ _____

答案: $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + C$ 或写 $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x}{x-2} \right| + C$ 或写 $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$ (C 为任意常数)

解: 积分公式: $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

$\int \frac{1}{x^2 - 4} dx = -\int \frac{1}{4 - x^2} dx = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + C$

25、定积分 $\int_{-1}^1 x^3 \sin^2 x dx =$ _____

答案: 0

解: 因为 $x^3 \sin^2 x$ 是奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 x^3 \sin^2 x dx \overset{\text{偶倍奇0}}{=} 0$

三、计算题（本大题共有 5 小题，每小题 10 分，共 50 分。计算题必须写出计算过程，只写答案的不给分）

26、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

答案： $\frac{1}{6}$

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0} \text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{\text{分子等价}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$

27、已知 $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 k 的值

答案： $k = e^2$

解： ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2$

② $f(0) = k$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$\therefore k = e^2$

28、求曲线 $y = (1-x)^3$ 的凹凸区间

答案：凹区间： $(-\infty, 1)$ ；凸区间： $(1, +\infty)$

解： ① 定义域： $(-\infty, +\infty)$

② $y' = -3(1-x)^2$ ， $y'' = 6(1-x)$

令 $y'' = 0$ 得： $x = 1$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	-
y	凹	拐点	凸

凹区间： $(-\infty, 1)$ ；凸区间： $(1, +\infty)$

29、求定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

答案: $-\frac{3}{2} + 3\ln 2$

解: 令 $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3$

当 $x=1$ 时, $t=1$; 当 $x=0$ 时, $t=0$

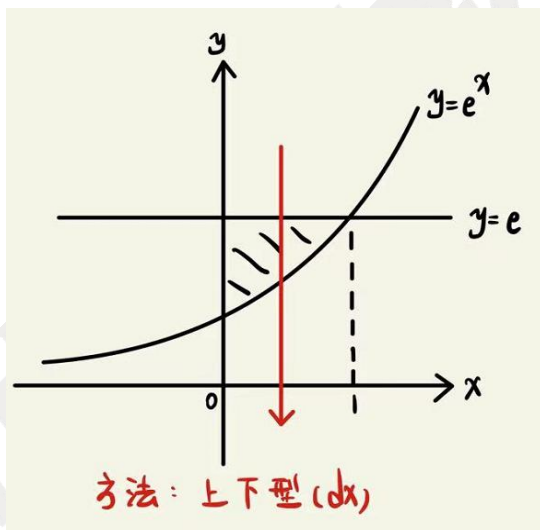
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt^3 = 3 \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt = 3 \int_0^1 \frac{t^2-1+1}{t+1} dt = 3 \int_0^1 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = 3 \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) = -\frac{3}{2} + 3\ln 2\end{aligned}$$

30、已知 D 是由 $y=e^x$, $y=e$ 与 y 轴所围成的平面图形, 求:

(1) D 的面积

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的立体体积

答案: (1) $S=1$, (2) $V_x = \frac{1}{2}\pi e^2 + \frac{1}{2}\pi$



解: $S = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$

$$\begin{aligned}V_x &= \pi \int_0^1 [e^2 - (e^x)^2] dx = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx = \pi \left(e^2 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left[\left(e^2 - \frac{1}{2} e^2 \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \pi e^2 + \frac{1}{2} \pi\end{aligned}$$