浙江省 2025 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、答案：B

解析：

左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+cosx)=2$

右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2)=2$

函数值$f(0)=3$

2、答案：A

解析：

A.$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

B.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}sinx=0$（无穷小乘有界函数仍为无穷小）

C.$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}}=e^0=1$

D.$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{ln(1+t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1+t}}=e^0=1$

3、答案：D

解析：

$y'=\left(4\sqrt{x}+1\right)'=2\frac{1}{\sqrt{x}}\quad\therefore y'|_{x=2}=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,则$dy|_{x=2}=\sqrt{2}dx$

4、答案：C

解析：

法一、$\int_0^{\pi}cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+cos2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sin2x\right)|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi$

法二、根据公式

（1）$\int_0^{\pi}xf(sinx)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(sinx)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(sinx)\,dx$

（2）华里士公式（点火公式）：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}，n为正偶数； \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1，n为正奇数 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

5、答案：B

解析：

A.可举反例，如：$u_n = \frac{1}{n}$.

B.$\because \sum_{n=1}^{\infty}|u_k|$为正项级数，故$s_n = \sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$单调递增，又$\because s_n$有界,∴根据数列极限的单调有界准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在.故由级数敛散性定义可知，$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$收敛.

C.可举反例，如$u_n = \frac{1}{n^2}$.

D.可举反例，如$u_n = (-1)^n\frac{1}{n}$.

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6、答案：1

解析：直接代入

$f(0) = \cos(\arcsin 0) = \cos 0 = 1$

7、答案：$a = -3$

解析：

$\because \lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - 5x + a) = 0$

则$18 - 15 + a = 0 \Rightarrow a = -3$

8、答案：$a = 6$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x - a\sin\frac{x}{2}}{\frac{x^3}{8}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3 - \frac{a}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{3}{8}x^2} = 1$

$\because \frac{0}{0}$型，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \frac{a}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = 6$

9、答案：$y = 1$

解析：

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{3}{x-2}}=1$，则水平渐近线：$y=1$

10、答案：16

解析：

$y^{(5)}(x)=2^5\cos 2x$

则 $y^{(5)}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=16$

11、答案：$y=-x+1$

解析：$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{1}{e^t(t+1)^2}\Big|_{t=0}=1$

则切线斜率 $k=1$，即法线斜率 $k=-1$

且 $t=0$ 时 $x=1,y=0$

故法线方程：$y=-x+1$

12、答案：-2

解析：

$y^{'}=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

因为 $\begin{cases} x\in(-\infty,-2),f^{'}(x)>0 \\ x\in(-2,1),f^{'}(x)<0 \\ x\in(1,+\infty),f^{'}(x)>0 \end{cases}$，则 $x=1$ 为极小值点，极小值 $f(1)=-2$

13、答案：$\dfrac{1}{y}=\arctan x+1$

解析：

分离变量：

$(x^2+1)dy=-y^2dx$

$\int -\dfrac{1}{y^2}dy=\int\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$\dfrac{1}{y}=\arctan x+C$

因为 $y(0)=1\Rightarrow C=1$，则 $\dfrac{1}{y}=\arctan x+1$

14、答案：$\dfrac{4}{3}$

解析：

因为$\int_1^2 f(2-x)dx=4$，令$2-x=t$，$\int_1^2 f(2-x)dx=\int_0^1 f(t)dt=4$

又$\because \int_0^1 x^2 f(x^3)dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1 f(x^3)dx^3=\dfrac{4}{3}$

15、答案：$\dfrac{2\pi}{3}$

解析：

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx=\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx=\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_{-2}^{1}=\frac{2\pi}{3}$$

三、计算题（本大题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出计算过程，只写答案的不给分）

16、答案：$a=-1$，$b=2$

解析:(1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x+ax+2)=2$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2+b=b$

$\because$ 可导必连续

$\therefore b=2$

$\therefore f(0)=b=2$

(2) $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x+ax+2-2}{x-0}=1+a$

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+2-2}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$

$\because$ 可导

$\therefore 1+a=0$

$\therefore a=-1, b=2$

17、答案：$\dfrac{1}{2}$

解析:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^3)dt}{x^2(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^3)dt}{x^2\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$

18、答案：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y\cos(xy)-\ln(x+y)-1}{\cos(xy)x+\ln(x+y)}$

解析：两边同时对x求导

$$\cos(xy)(y+xy')+(1+y')\ln(x+y)+(x+y)\frac{1}{x+y}(1+y')-y'=0$$

$$\Rightarrow \cos(xy)y+\cos(xy)xy'+\ln(x+y)+\ln(x+y).y'+1+y'-y'=0$$

$$[\cos(xy)x+\ln(x+y)]y'=-\cos(xy)y-\ln(x+y)-1$$

即$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y\cos(xy)-\ln(x+y)-1}{\cos(xy)x+\ln(x+y)}$

19、答案：凹区间：$(8,+\infty$，凸区间：$(-\infty,-1),(-1,8)$，拐点$(8,\dfrac{2}{27})$

解析：定义域:$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$y=\frac{x+1-3}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$y'=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{6}{(x+1)^3}$$

$$y''=\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{18}{(x+1)^4}=\frac{2x-16}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x-8)}{(x+1)^4}$$

$$y''>0\Rightarrow x>8$$

$$y''<0\Rightarrow x<-1,-1<x<8$$

凹区间:$(8,+\infty)$,凸区间:$(-\infty,-1),(-1,8)$

拐点:$(8,\dfrac{2}{27})$

20、答案：$y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}+\dfrac{1}{26}(2\cos x-3\sin x)$（$c_1$、$c_2$为任意常数）

解析：$\lambda^2-4\lambda-5=0$

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=5$$

$$\overline{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}$$

设$y^*=A\cos x+B\sin x$,代入原方程得

$$y^*=\frac{1}{26}(2\cos x-3\sin x)$$

故原方程解为$y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}+\dfrac{1}{26}(2\cos x-3\sin x)$

21、答案：$\dfrac{3}{40}(1-2x^2)^{\frac{5}{3}}-\dfrac{3}{16}(1-2x^2)^{\frac{2}{3}}+C$（$C$为任意常数）

解析：原式$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-2x^2}}dx^2\overset{令x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt[3]{1-2t}}dt=-\frac{1}{4}\int\frac{1-2t-1}{\sqrt[3]{1-2t}}dt$

$$=-\frac{1}{4}\int(1-2t)^{\frac{2}{3}}-(1-2t)^{-\frac{1}{3}}dt$$

$$=\frac{1}{8}[\frac{3}{5}(1-2t)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(1-2t)^{\frac{2}{3}}]+C$$

$$=\frac{3}{40}(1-2x^2)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{16}(1-2x^2)^{\frac{2}{3}}+C$$

22、答案：$-5x-3y+4z+2=0$或写$5x+3y-4z-2=0$

解析：由题意得,点$M(-1,1,-1),\vec{s}=(1,1,2)$

$\vec{PM}=(-2,2,-1)$

$\vec{s}\times\vec{PM}=(-5,-3,4)$

$$d=\frac{\left|\vec{s}\times\vec{PM}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{PM}=(-5,-3,4)$

平面方程为$-5(x-1)-3(y+1)+4z=0$

即$-5x-3y+4z+2=0$

23、答案：$\frac{2}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析:$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+x\sqrt{1+x^4})dx+\int_{1}^{2}x\arcsin(\frac{1}{x})dx$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}x\sqrt{1+x^4}dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\arcsin(\frac{1}{x})dx^2$$

$$=2\int_{0}^{1}x^2dx+0+\frac{1}{2}x^2\arcsin(\frac{1}{x})\bigg|_1^2-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(-\frac{1}{x^2})dx$$

$$=2.\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^1+\frac{1}{2}.4.\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\bigg|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

四、综合题（本大题共三题，每小题 10 分，共 30 分）

24、答案：（1）$\frac{3}{2}$；（2）$a=4$，$\frac{4}{5}\pi$

解析：（1）$D=2\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=2\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$

（2）联立 $y=ax^2$ 与 $y=1$ 得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$，则

$$D_1=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(1-ax^2\right)dx=2\left(x-\frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3}{3}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right)=\frac{4}{3\sqrt{a}}$$

由 $D:D_1=9:4$，得出 $\frac{3}{2}:\frac{4}{3\sqrt{a}}=9:4$，从而 $a=4$

$$V_{D_1}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left[1^2-\left(4x^2\right)^2\right]dx=2\pi\left(x-\frac{16}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{5}\frac{1}{32}\right)=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=\frac{4}{5}\pi$$

25、答案：（1）$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

（2）$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$x\in[-1,1]$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)3^n}=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

解析：1）$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

2）$f(x)=\arctan x=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，

其中 $x\in[-1,1]$

3）法一：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)}(x)^{2n}\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}$

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)}(x)^{2n}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)}(x)^{2n-1}=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)}\right)'$

$$=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right)'\overset{x\neq 0}{=}\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}\arctan x\right)'=\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\arctan x+\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\right)$$

其中 $x\neq 0$

即原级数

$$=S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left[\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\arctan x+\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\right)\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-3\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

法二：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1-1}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6}=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

26、答案：/

证：法一：

（1）先证：$\frac{\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$

证：设 $f(x)=x-\sin x$， $x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$， 故 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because f(0)=0$， $\therefore f(x)>0$， 故 $x>\sin x$， 取 $x=\frac{\pi}{7}$ 可得， $\frac{\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$.

（2）再证：$\sin\frac{\pi}{7}>\frac{3}{7}$

证：设 $g(x)=\sin x-\frac{3}{\pi}x$， $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

$g'(x)=\cos x-\frac{3}{\pi}$， $g''(x)=-\sin x<0$， 故 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上是凸的，

即当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时， $g(x)>g(0)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\sin x>\frac{3}{\pi}x$

取 $x=\frac{\pi}{7}\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 可得，$\sin\frac{\pi}{7}>\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{7}=\frac{3}{7}$.

综上所述：不等式 $\frac{\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}>\frac{3}{7}$ 成立.

法二：

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{3}{\pi}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

设 $g(x)=x\cos x-\sin x$，$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，

$\because g(0)=0\ \therefore g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减.

$\because f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，$\therefore f(x)>0$，故 $\frac{\sin x}{x}>\frac{3}{\pi}$，取 $x=\frac{\pi}{7}$，可得 $\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{7}}>\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{7}$，

即 $\sin\frac{\pi}{7}>\frac{3}{7}$